Téma:Kvadratická funkce s absolutní hodnotou

Vypracoval: Mgr. Charamza Josef

TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

Definice

Kvadratická funkce s absolutní hodnotou je taková kvadratická funkce, která má ve svém předpisu jednu nebo i více absolutních hodnot, ve kterých jsou výrazy s proměnnou. Grafy takových funkcí řešíme po jednotlivých intervalech určených nulovými body jednotlivých výrazů, které jsou uvnitř absolutních hodnot.
Grafem takové funkce bude několik částí parabol s ostrými hroty ve styčných bodech jednotlivých intervalů.

Postup si ukážeme na příkladech:
Určete grafy následujících funkcí (použijte znalostí o výrazech s absolutními hodnotami):

Příklad 1

$$y = \frac{1}{4}x^2 - |2x - 1|$$

Úlohu řešíme po intervalech na které rozděluje definiční obor funkce D=R nulový bod výrazu v absolutní hodnotě.

a) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 1 = \frac{1}{4}(x^2 + 8x + 16) - 4 - 1$$

$$y + 5 = \frac{1}{4}(x + 4)^2 \quad \Rightarrow V_1 = [-4; -5] \wedge F_1 = [-4; -4]$$

b) $x \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{4}(x^2 - 8x + 16) - 4 + 1$$

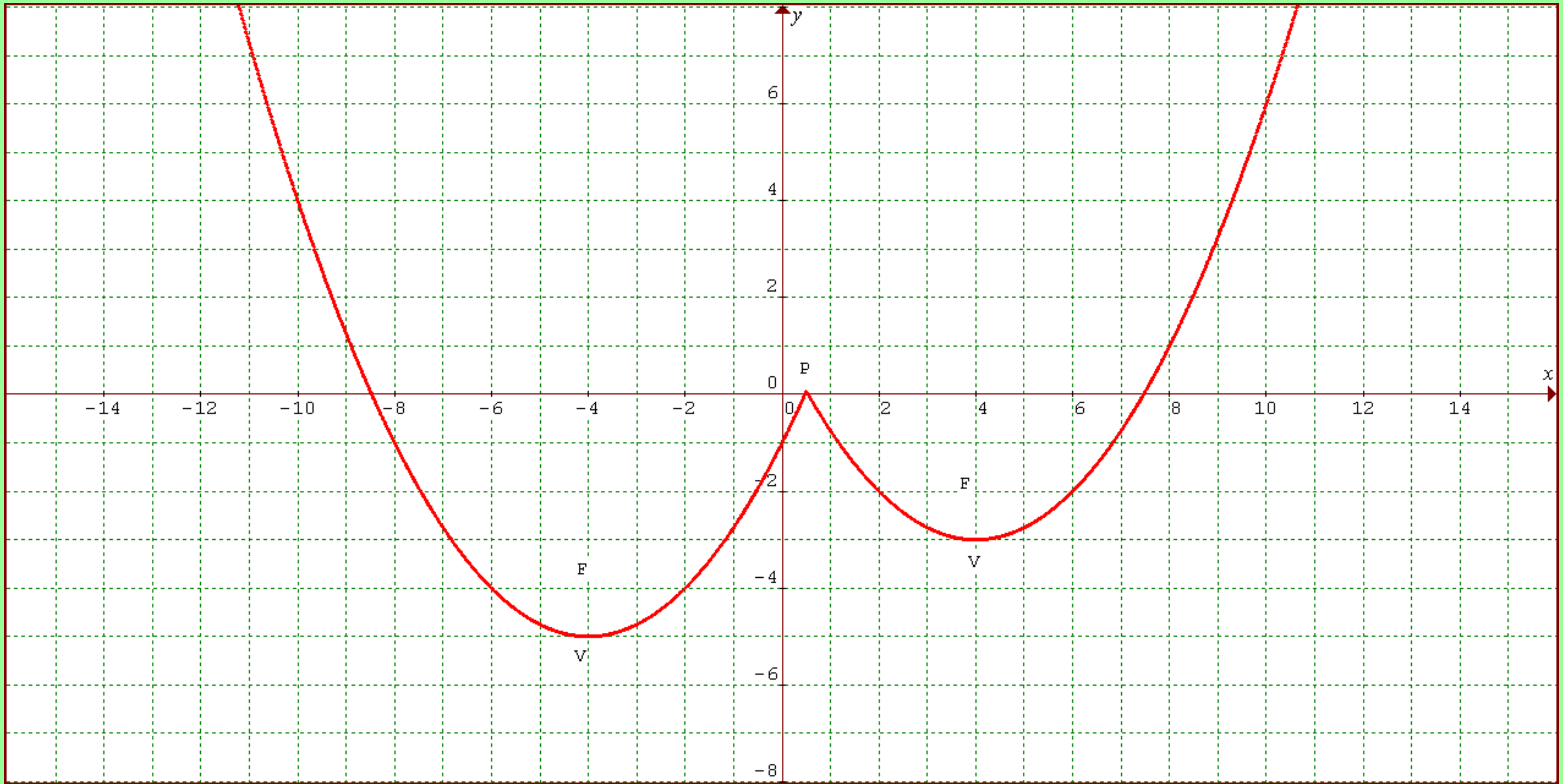
$$y + 3 = \frac{1}{4}(x - 4)^2 \quad \Rightarrow V_2 = [4; -3] \wedge F_2 = [4; -2]$$

Je výhodné zjistit si i souřadnice styčného bodu obou intervalů:

$$P = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{16}\right]$$

Z těchto vypočtených hodnot pak snadno zjistíme graf:

Grafické znázornění



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Příklad 2:

$$y = \frac{1}{4}x|2x + 4|$$

a) $x \in (-\infty; -2)$

$$y = \frac{1}{4}x(-2x - 4) = -\frac{1}{2}x^2 - x = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 \quad \Rightarrow V_1 = \left[1; \frac{1}{2}\right] \wedge F_1 = [1; 0]$$

b) $x \in (-2; \infty)$

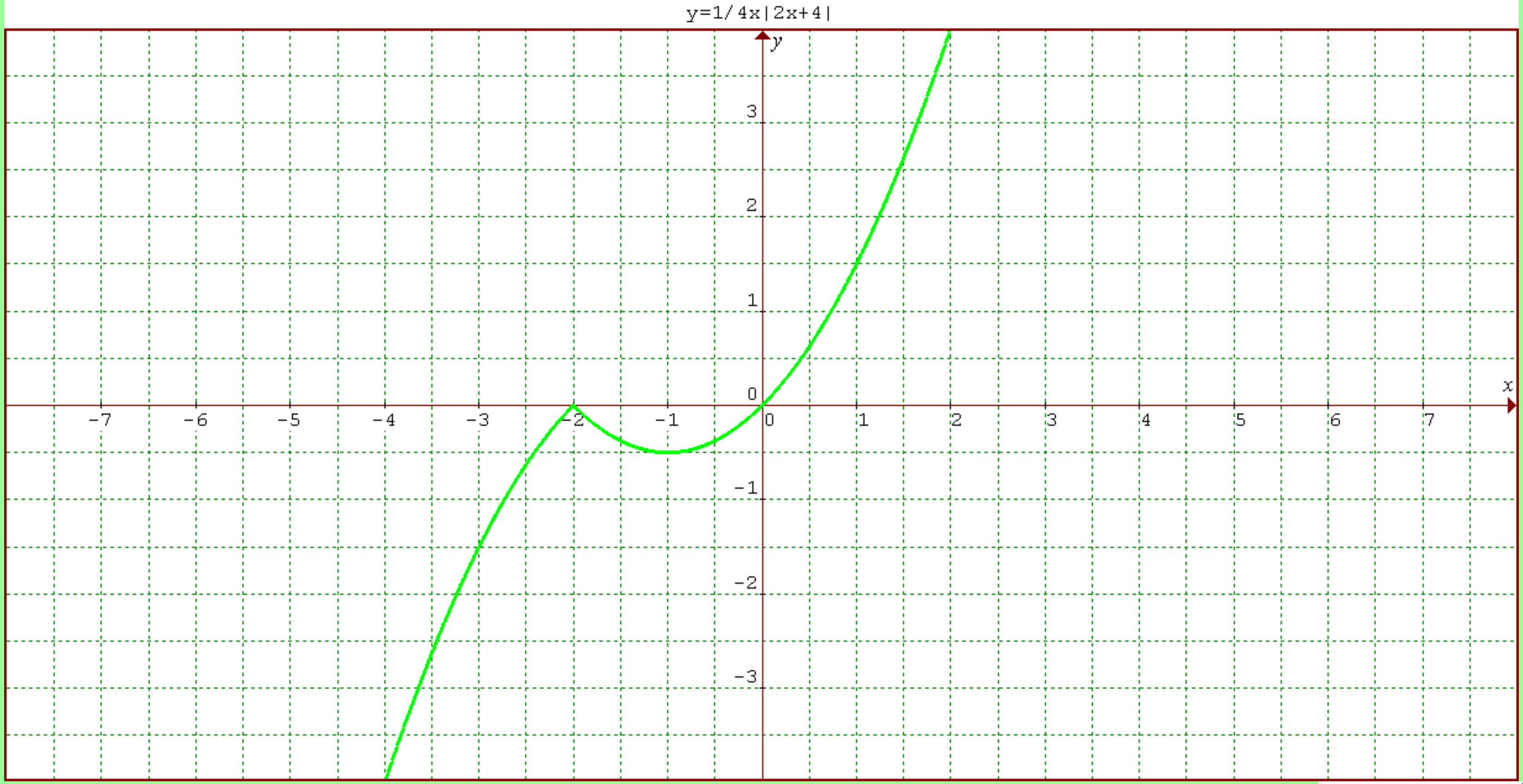
$$y = \frac{1}{4}x(2x + 4) = \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - \frac{1}{2}$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + 1)^2 \quad \Rightarrow V_2 = \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \wedge F_2 = [-1; 0]$$

Z toho pak vyplývá graf:

OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Grafické znázornění:



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Příklad 3:

$$y = \left|x^2 - 8x + 15\right| = \left|(x-5)(x-3)\right|$$

a) $x \in (-\infty;3) \cup (5;\infty)$

$$y - 15 = x^2 - 8x + 16 - 16$$

$$y + 1 = (x-4)^2 \qquad V_1 = [4;-1]$$

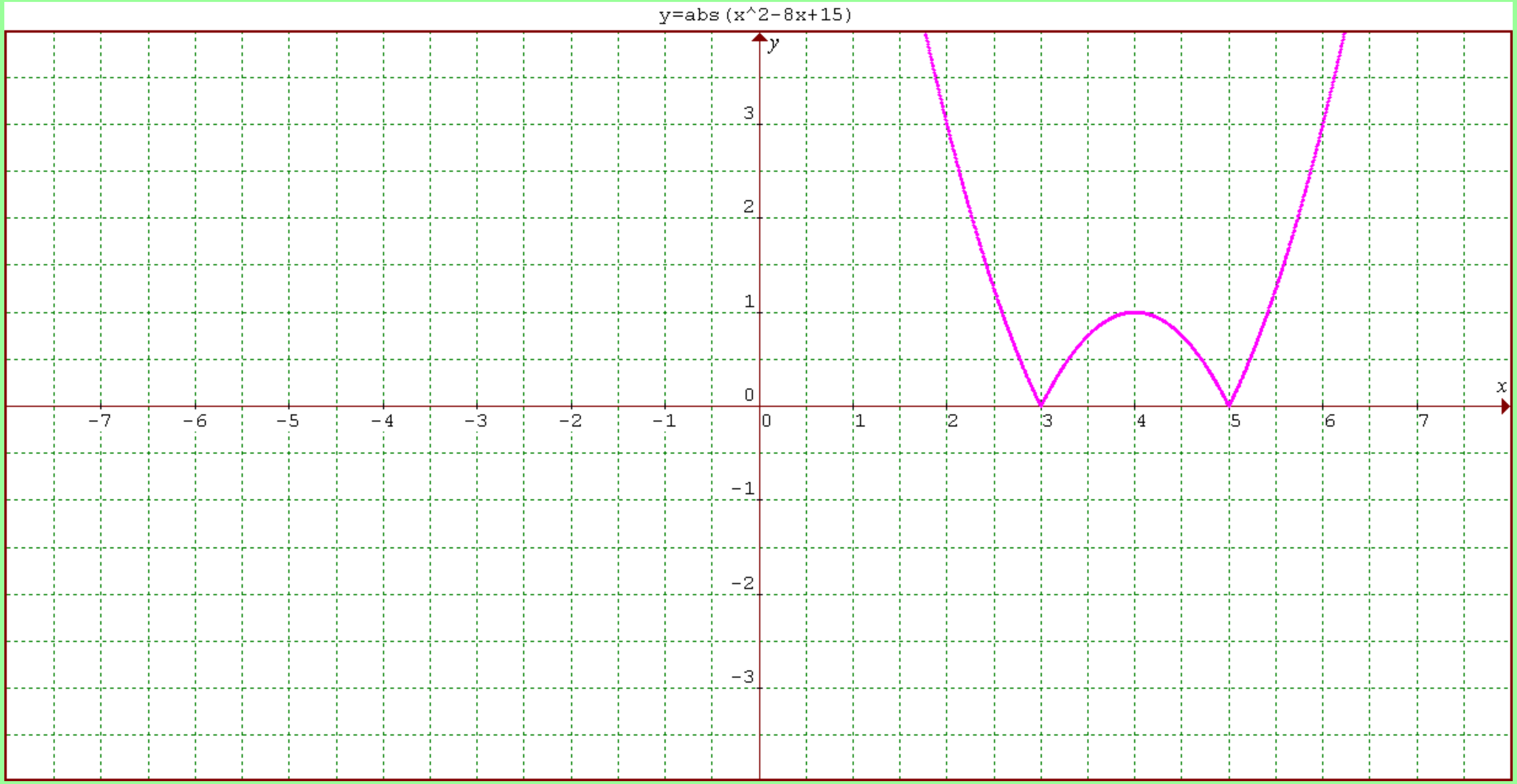
b) $x \in (3;5)$

$$y = -(x^2 - 8x + 15) = -(x^2 - 8x + 16) + 16 - 15$$

$$y - 1 = -(x-4)^2 \qquad \Rightarrow V_2 = [4;1]$$

Z výpočtu plyne graf funkce:

Grafické znázornění:



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Příklad 4:

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + |2x + 6|$$

a) $x \in (-\infty; -3)$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 6 = -\frac{1}{4}\left(x^2 + 8x + 16\right) + 4 - 6$$

$$y + 2 = -\frac{1}{4}(x + 4)^2 \quad \Rightarrow V_1 = [-4; -2]$$

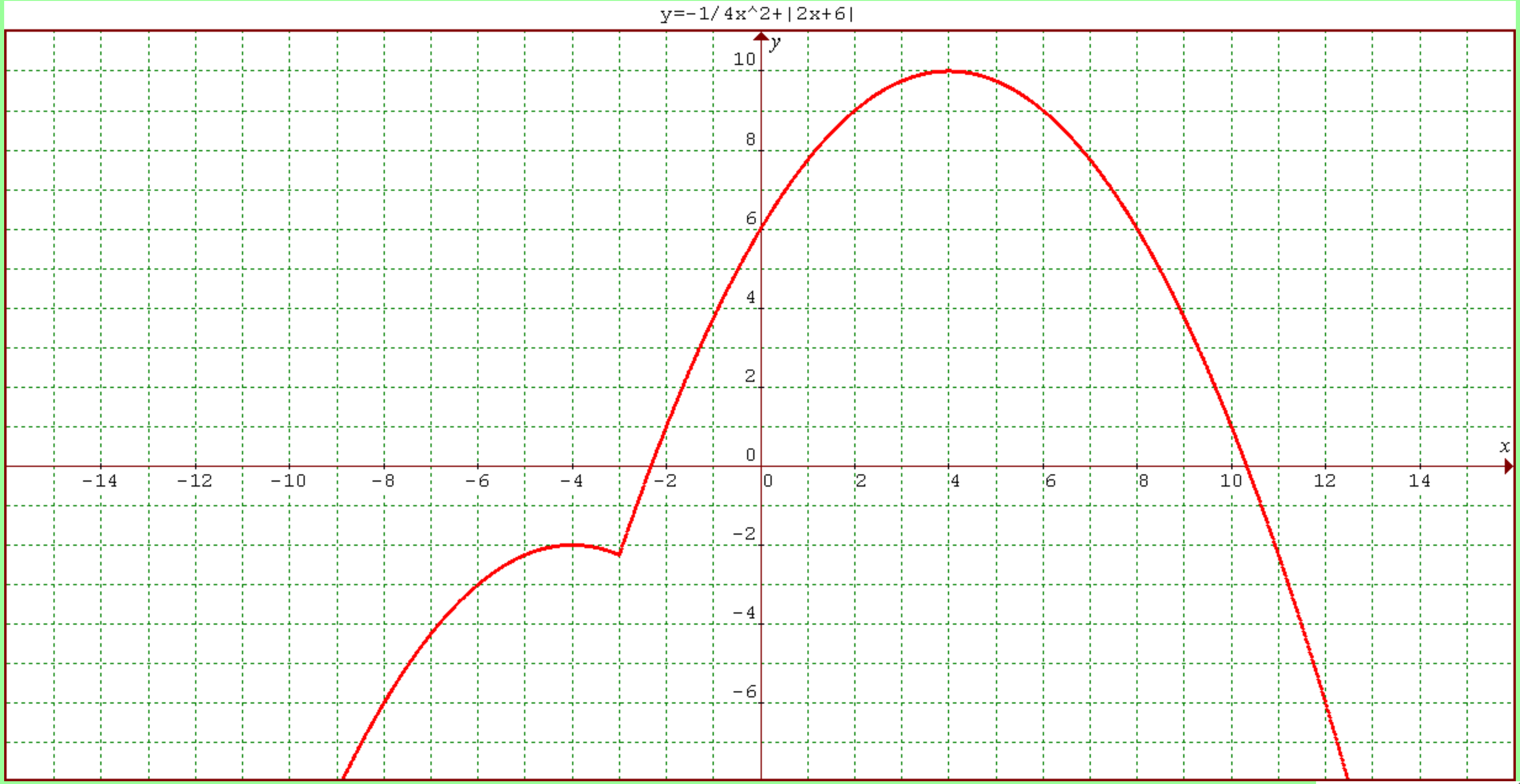
b) $x \in (-3; \infty)$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6 = -\frac{1}{4}\left(x^2 - 8x + 16\right) + 4 + 6$$

$$y - 10 = -\frac{1}{4}(x - 4)^2 \Rightarrow V_2 = [4; 10]$$

Z výpočtu plyne graf funkce:

Grafické znázornění:



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Příklady k procvičení

Určete grafy následujících funkcí (použijte znalostí o výrazech s absolutními hodnotami):

1. $y = |x^2 + 8x - 20|$ $V = [-4; \pm 36]$
2. $y = |x^2 - 6x + 5|$ $V = [3; \pm 4]$
3. $y = |x^2 - 8x + 7|$ $V = [4; \pm 9]$
4. $y = |2x^2 - 8x - 4|$ $V = [2; \pm 18]$
5. $y = \left|\frac{1}{2}x^2 + x - 4\right|$ $V = [-1; \pm 4{,}5]$
6. $y = \left|-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right|$ $V = [3 + \pm 0{,}5]$
7. $y = x^2 - |4x - 3|$ $V_1 = [-2; -7]; V_2 = [2; -1]$
8. $y = 2x^2 - |4x - 1|$ $V_1 = [-1; -1]; V_2 = [1; -3]$
9. $y = \frac{1}{2}x^2 - |3x - 2|$ $V_1 = [-3; -6{,}5]; V_2 = [3; -2{,}5]$
10. $y = \frac{1}{4}x^2 - |2x - 4|$ $V_1 = [-4; -3]; V_2 [4; 0]$
11. $y = -\frac{1}{4}x^2 + |2x + 3|$ $V_1 = [-4; 1]; V_2 = [4; 7]$
12. $y = -\frac{1}{4}x^2 - |3x - 3|$ $V_1 = [-6; 12]; V_2 = [6; 6]$

Příklady k procvičení:

13. $y = \frac{1}{8}x^2 - |x - 1|$ $\qquad V_1 = [-4;-3]; V_2 = [4;-1]$

14. $y = -\frac{1}{8}x^2 + |x + 2|$ $\qquad V_1 = [-4;0]; V_2 [4;4]$

15. $y = \frac{1}{8}x|x - 4|$ $\qquad V_{1,2} = \left[2;\pm\frac{1}{2}\right]$

16. $y = \frac{1}{6}x|x + 6|$ $\qquad V_{1,2} = \left[-3;\pm\frac{3}{2}\right]$

17. $y = -\frac{1}{4}x[x + 8]$ $\qquad V_{1,2} = [-4;\pm 4]$

18. $y = |-x - 4| \cdot |x - 2|$ $\qquad V_{1,2} = [-1;-9]$