MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Derivace

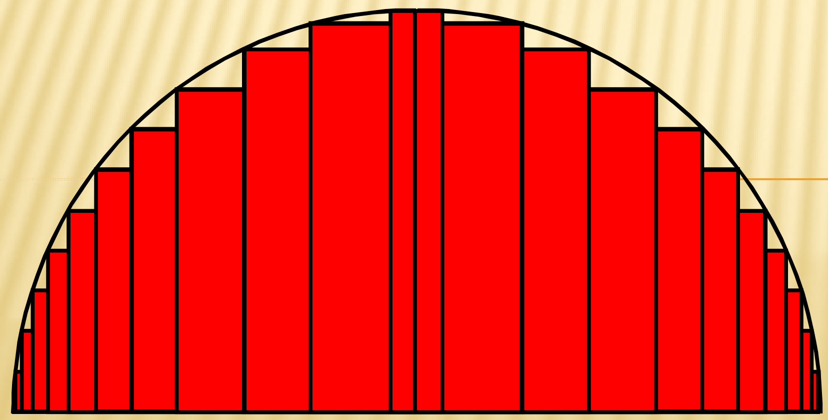
Vypracoval: **Mgr. Lukáš Bičík**

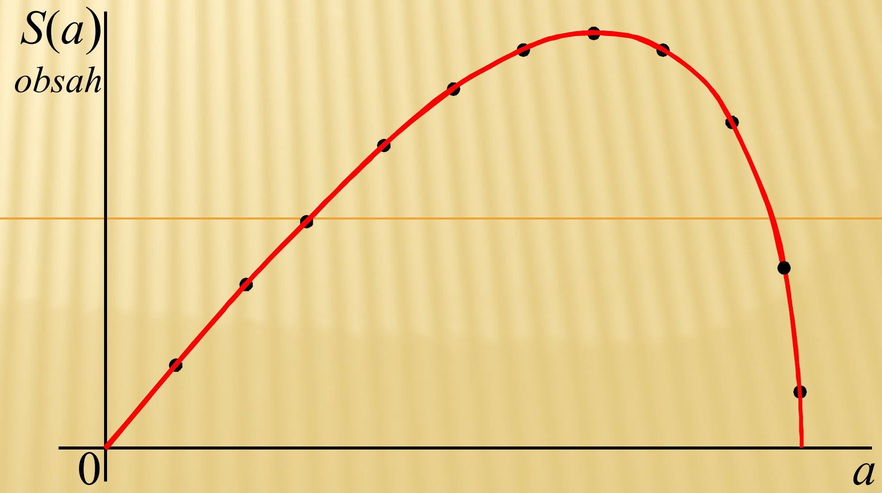
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN
EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Motivace

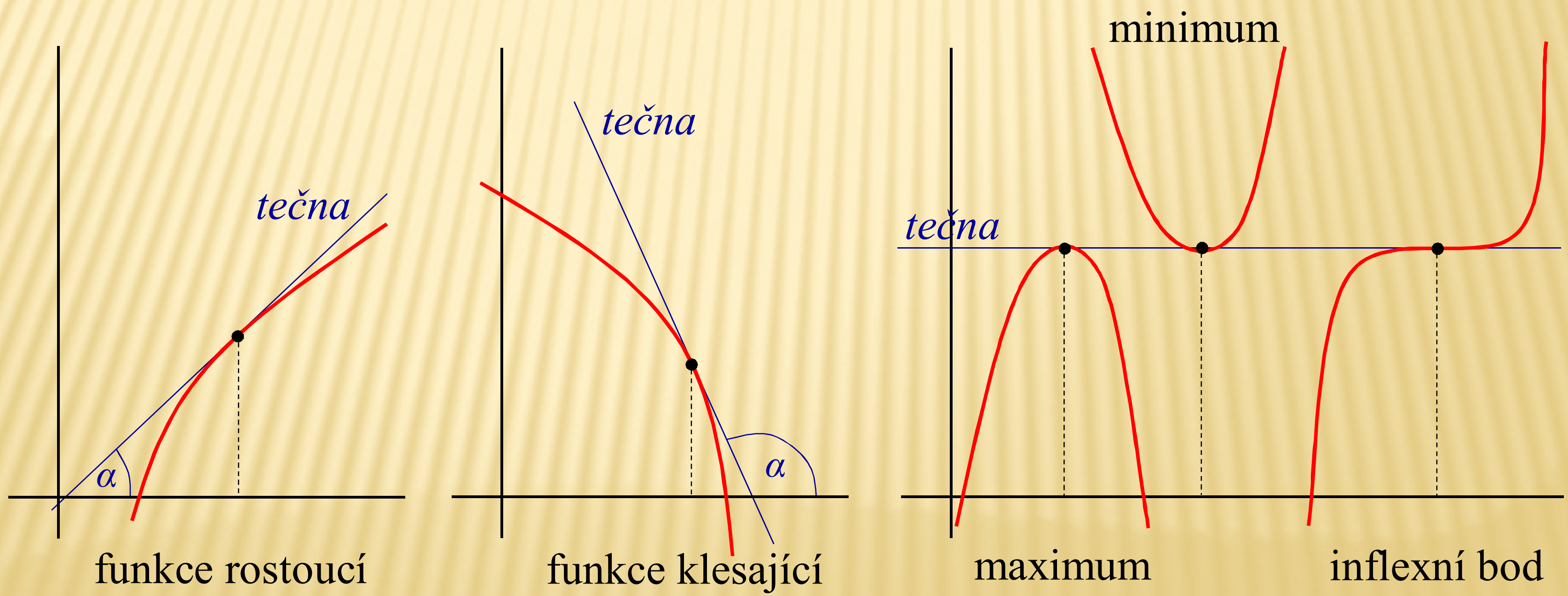
Funkce v reálném životě vyjadřují závislost jedné veličiny na jiné veličině. Např. závislost ujeté dráhy na čase, výkon motoru na jeho otáčkách nebo délky nějakého předmětu na teplotě (tepelná roztažnost). U funkcí je často potřeba zjistit, pro jaké hodnoty funkce nabývá maxima, minima, kde je rostoucí, kde klesající (viz prezentace „Vlastnosti funkcí“).

Příklad: Obsah obdélníka vepsaného do půlkruhu je závislý na tom, jak dlouhou zvolíme jednu stranu obdélníka – např. stranu kolmou na průměr půlkruhu (viz animace – strana a). Pokud budeme zvětšovat stranu a, bude se po určitou dobu zvětšovat i obsah obdélníka. Po dosažení určité délky strany a se obsah zase začne zmenšovat. Z praktických důvodů je potřeba zjistit, pro jakou hodnotu a je obsah největší, neboli kde funkce nabývá svého maxima.

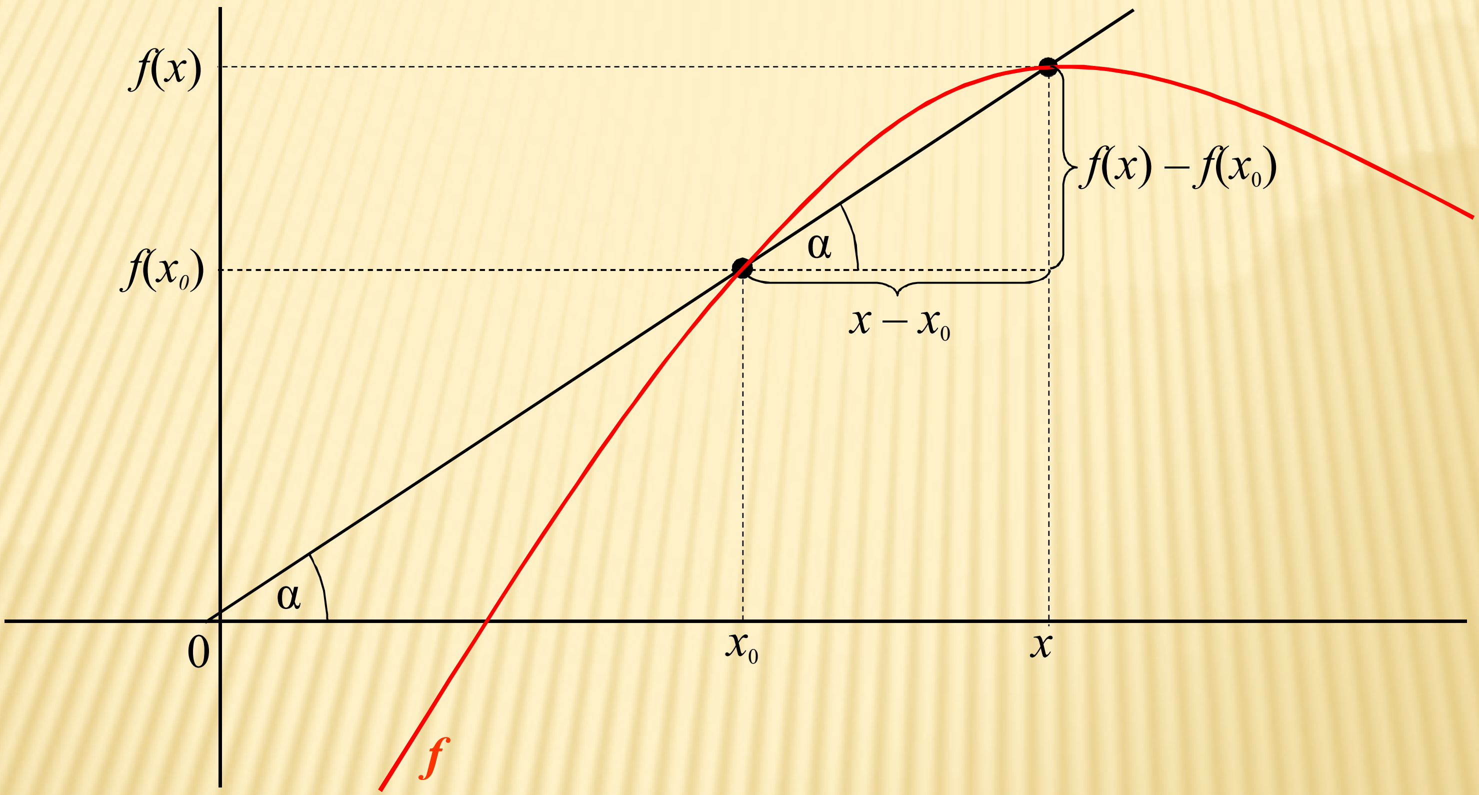




Jak ale určit, kde funkce nabývá svého maxima, minima, či kde je rostoucí nebo klesající? Odpověď nalezli ve druhé polovině sedmnáctého století nezávisle na sobě dva matematici – Isaac Newton a Gotfried Leibnitz. Uvědomili si, že pokud je funkce v daném bodě rostoucí, i tečna v daném bodě je rostoucí, neboli úhel této tečny s osou x je v intervalu (0°;90°). Pokud je funkce v bodě klesající, i tečna v tomto bodě je klesající a svírá tedy s osou x úhel v rozmezí (90°;180°). Pokud je v daném bodě tečna rovnoběžná s osou x, může v tomto bodě nastat maximum, minimum nebo inflexní bod.



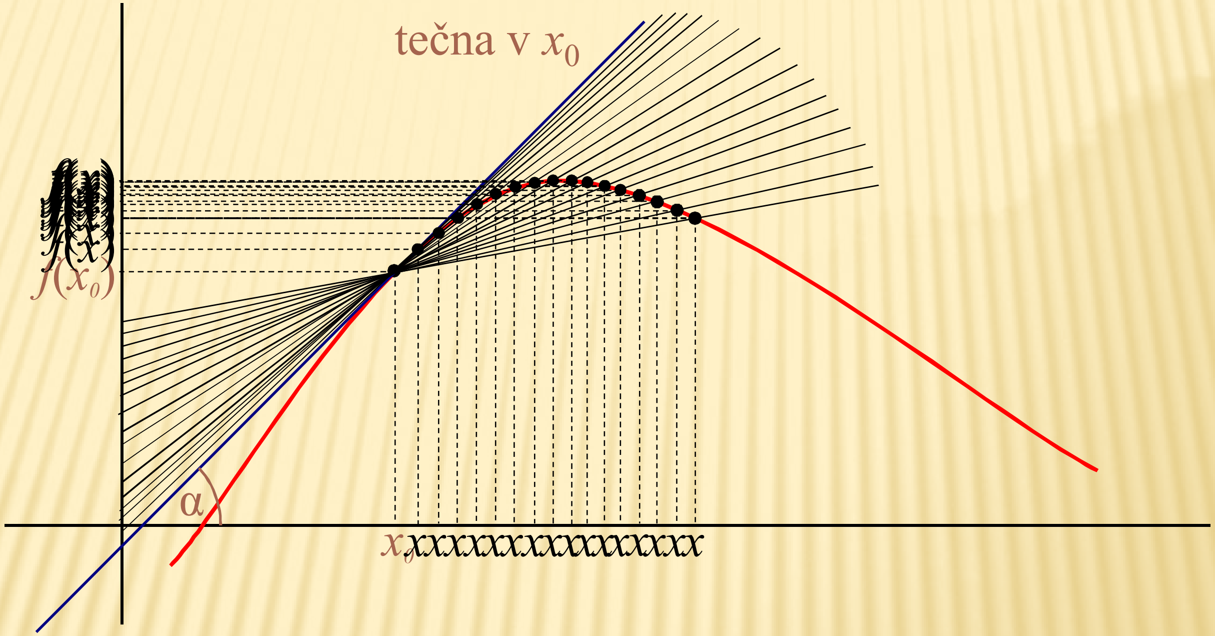
Jak ale spočítat sklon tečny v daném bodě? Zkusme nejdříve spočítat sklon nějaké sečny procházející daným bodem x_0 a nějakým dalším bodem x v jeho okolí. Na obrázku je funkce f a její sečna procházející body $[x_0;f(x_0)]$ a $[x;f(x)]$:



Úhel α, který svírá tato sečna s osou x, lze vyjádřit pomocí tangens (poměr protilehlé odvěsny ku přilehlé) takto:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Jak jsme si však vysvětlili, praktický význam pro výpočty na funkcích nemá náhodná sečna, nýbrž tečna. Tečnu v bodě x_0 však můžeme získat ze sečny tak, že hodnotu x budeme postupně přibližovat k x_0, až se k této hodnotě přiblížíme nekonečně blízko (viz animace).



Toto „nejtěsnější“ přiblížení x k x_0 můžeme vyjádřit pomocí limity takto:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tento výraz se zkráceně nazývá derivací funkce v bodě x_0 a zapisuje se $f'(x_0)$.

Příklad: Určeme derivaci funkce $f(x) = 2x + 3$.

Dosadíme do vzorce z předchozí strany:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(2x+3)-(2x_0+3)}{x-x_0}=\lim_{x-x_0}\frac{2x+3-2x_0-3}{x-x_0}=\lim_{x-x_0}\frac{2(x-x_0)}{x-x_0}=2$$

Derivace je tedy $f'(x) = (2x + 3)' = 2$.

Příklad: Určeme derivaci funkce $f(x) = x^2$.

Dosadíme do vzorce z předchozí strany:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0{}^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\cdot(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$$

Derivace je tedy $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

Derivace elementárních funkcí

Určování derivací přes limitu je evidentně těžkopádné a u složitějších funkcí i neproveditelné. Z toho důvodu byly odvozeny vzorce a postupy, pomocí kterých je derivování podstatně jednodušší. Základem jsou vzorce pro derivování elementárních funkcí:

$$c' = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivace početních operací

Derivace početních operací (sčítaní, odčítání, násobení atd.) není tak samozřejmé, jak by se mohlo na první pohled zdát. I zde však existují vzorce, které derivování usnadňují:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Příklady

Příklad: Urči derivaci funkce $f(x) = 8x^2$.

$$f'(x) = (8x^2)' = 8 \cdot (x^2)' = 8 \cdot 2x = 16x$$

Příklad: Urči derivaci funkce $f(x) = x + \sin x$.

$$f'(x) = (x + \sin x)' = 1 + \cos x$$

Příklad: Urči derivaci funkce $f(x) = x \cdot e^x$.

$$f'(x) = (x \cdot \mathrm{e}^x)' = (x)' \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot (\mathrm{e}^x)' = 1 \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot (1 + x)$$

Příklad: Urči derivaci funkce

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x + \ln x \cdot (x)'}{(x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x + \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 + \ln x}{x^2}$$

Příklad: Urči derivaci funkce $f(x) = 3^{2x+1}$.

Vnější funkce je 3^x, vnitřní funkce je $2x + 1$.

$$f'(x) = (3^{2x+1})' = 3^{2x+1} \cdot \ln 3 \cdot (2x) = 3^{2x+1} \cdot x \cdot \ln 3^2 = x \cdot 3^{2x+1} \cdot \ln 9$$