Vlastnosti funkcí

Vypracoval: **Mgr. Lukáš Bičík**

TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN
EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Definiční obor

Definiční obor funkce je množina všech čísel, pro která je funkce definována, neboli všechna čísla, která lze dosadit do předpisu funkce. Určuje se z podmínek.

Podmínky pro funkce používané na střední škole:

1) jmenovatel zlomku musí být různý od nuly

2) výraz pod odmocninou musí být nezáporný (a výraz v odmocniteli musí být různý od nuly)

3) v argumentu logaritmu musí být výraz kladný (a v základu logaritmu musí být výraz kladný a různý od jedné)

4) v tangens musí být výraz různý od $\pi/2 + k\pi$

5) v kotangens musí být výraz různý od $k\pi$

Další podmínky, které se u funkcí vyskytují vzácně, jsou pro faktoriál (musí být z celého nezáporného čísla) a pro kombinační číslo (oba výrazy celé nezáporné, navíc horní výraz je větší nebo roven spodnímu).

Zápis definičního oboru funkce f: $D(f)$

Obor hodnot

Je množina všech hodnot, kterých funkce nabývá, tedy všech $y = f(x)$. Obor hodnot lze spočítat pomocí diferenciálního počtu (4. ročník), nebo jej lze určit z grafu funkce – všechny hodnoty na svislé ose, ke kterým existuje bod na grafu.

Zápis oboru hodnot funkce f: $\mathrm{H}(f)$

Omezenost funkce

Funkce je omezená zdola, existuje-li konstanta (reálné číslo), pro které platí, že všechny hodnoty f(x) jsou větší než tato konstanta.

$$\exists c \in R \ tak, \ že \ \forall x \in D(f) \ platí \ \ f(x) > c$$

Funkce je omezená shora, existuje-li konstanta (reálné číslo), pro které platí, že všechny hodnoty f(x) jsou menší než tato konstanta.

$$\exists c \in R \ tak, \ že \ \forall x \in D(f) \ platí \ \ f(x) < c$$

Funkce je omezená, je-li omezená zdola i shora zároveň.

$$\exists c \in R \ tak, \ že \ \forall x \in D(f) \ platí \ \left| f(x) \right| < c$$

Omezenost funkce lze určit z oboru hodnot, nejde-li H(f) do nekonečna, je funkce omezená (shora, resp. zdola).

Funkce prostá

Funkce je prostá, je-li každému *y* z oboru hodnot přiřazeno jen jedno *x* z definičního oboru (nikoliv obráceně, to platí pro všechny funkce!!!). Tzn., umístíme-li vodorovnou přímku v libovolném místě soustavy souřadnic, tato přímka protne graf funkce maximálně v jednom bodě.

Prostou funkcí je např. nekonstantní lineární funkce, exponenciela, logaritmus.

Funkce sudá a lichá

Pokud má funkce graf osově symetrický dle osy y, říkáme o ní, že je sudá.

$$\forall x \in D(f) \;\; platí \;\; f(x) = f(-x)$$

Pokud má funkce graf středově souměrný dle počátku souřadnic, říkáme o ní, že je lichá.

$$\forall x \in D(f) \;\; platí \;\; f(x) = -f(-x)$$

Sudou funkcí je například funkce konstantní a kosinus, lichou funkcí je například tangens či sinus.

Monotonie funkce

Funkce je na daném intervalu rostoucí, jestliže její graf na daném intervalu roste nahoru (myšleno směrem zleva doprava).

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) \ \ \textit{takové, že} \ x_1 < x_2, \textit{platí} \ \ f(x_1) < f(x_2)$$

Funkce je na daném intervalu klesající, jestliže její graf na daném intervalu klesá dolů (myšleno směrem zleva doprava).

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) \ \ \textit{takové, že} \ x_1 < x_2, \textit{platí} \ \ f(x_1) > f(x_2)$$

Funkce je na daném intervalu nerostoucí, jestliže její graf na daném intervalu neroste nahoru (myšleno směrem zleva doprava).

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) \ \ \textit{takové, že} \ x_1 < x_2, \textit{platí} \ \ f(x_1) \geq f(x_2)$$

Funkce je na daném intervalu neklesající, jestliže její graf na daném intervalu neklesá dolů (myšleno směrem zleva doprava).

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) \ \ \textit{takové, že} \ x_1 < x_2, \textit{platí} \ \ f(x_1) \leq f(x_2)$$

Je-li funkce neklesající či nerostoucí, říkáme, že je monotónní, je-li funkce rostoucí či klesající, říkáme, že je ryze monotónní.

Extrémy

Funkce má na intervalu extrém v bodě x_0, jestliže pro všechny ostatní x na daném intervalu je jejich funkční hodnota f(x) menší nebo rovna $f(x_0)$ (maximum), nebo naopak větší nebo rovna $f(x_0)$ (minimum).

maximum: $\forall x \ z \ intervalu \ \ plat\acute{i} \ \ f(x) \leq f(x_0)$

minimum: $\forall x \ z \ intervalu \ \ plat\acute{i} \ \ f(x) \geq f(x_0)$

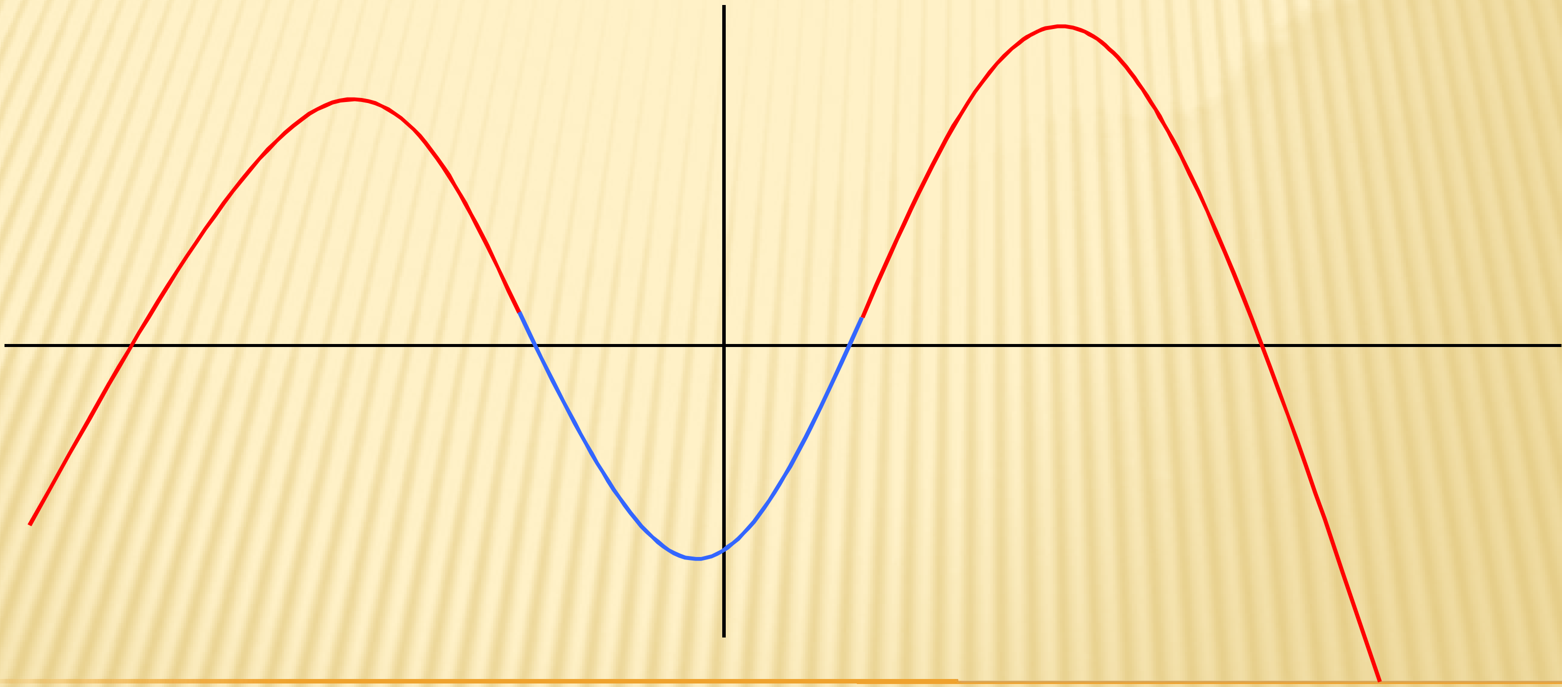
Je-li extrém jen na nějakém intervalu, říkáme, že je lokální, je-li extrémem pro celý definiční obor, říkáme, že je globální.

Máli funkce globálních extrémů více, říkáme, že jsou neostré, má-li jen jeden, říkáme, že je ostrý.

Extrémy lze určit pomocí diferenciálního počtu. Pokud v daném bodě existuje první a druhá derivace, pak je v něm extrém, jestliže $f'(x) = 0$ a $f''(x) \neq 0$. Další extrémy pak **mohou** být v bodech, ve kterých není derivace definována.

Konvexnost, konkávnost

„Prohnutí“ funkce na intervalu. Červeně jsou označeny úseky konkávní, modře úsek konvexní.



Příkladem konvexní funkce je funkce kvadratická s kladným koeficientem *a*, konkávní funkcí je kvadratická funkce se záporným koeficientem *a*.

Inflexní body

Ne zcela přesně řečeno jsou inflexní body takové body, ve kterých funkce není ani konvexní, ani konkávní (linární části grafu), nebo ve kterých dochází ke změně konvexnosti na konkávnost či naopak.

Spočítají se pomocí diferenciálního počtu – jsou to body, ve kterých se první i druhá derivace rovnají nule.

Periodicita

Funkce je periodická, pokud se její graf neustále „opakuje“. Délka opakujícího se úseku se nazývá **perioda**.

Přesná definice: funkce je periodická jestliže

$$\exists \omega > 0 \ tak, \ že \ \forall x \in D(f) \ platí \ \ f(x) = f(x+\omega)$$

Příkladem periodických funkcí jsou sinus, kosinus, tangens, kotangens.

Spojitost

Funkce je spojitá, je-li jejím grafem nepřerušená čára.

Přesná definice: Funkce je spojitá, jestliže

$$\forall x_0 \in D(f) \ \ plat\acute{\imath} \ \ f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Spojitou funkcí je například logaritmus, nespojitou funkcí je např. tangens nebo lineární lomená funkce.

Inverzní funkce

Jestliže funkce *f* číslům *x* přiřazuje dle předpisu čísla *y* (*f*(*x*)), pak funkce k ní inverzní (značíme ji $f^{-1}(x)$) je funkce, která číslům *y* přiřazuje čísla *x* (tedy přiřazuje přesně obráceně). Např. jestliže nějaká funkce přiřadí číslu 2 osmičku, a číslu tři desítku, pak funkce k ní inverzní přiřadí desítce trojku a osmičce dvojku.

Předpis inverzní funkce k dané funkci získáme tak, že v předpisu prohodíme *x* a *y* a následně z rovnice vyjádříme *y*.

Inverzní funkce existuje pouze k funkcím prostým!!!

Grafy dvou vzájemně inverzních funkcí jsou osově souměrné dle osy prvního a třetího kvadrantu.

Příkladem vzájemně inverzích funkcí jsou exponenciela a logaritmus.